小林研朝ゼミ

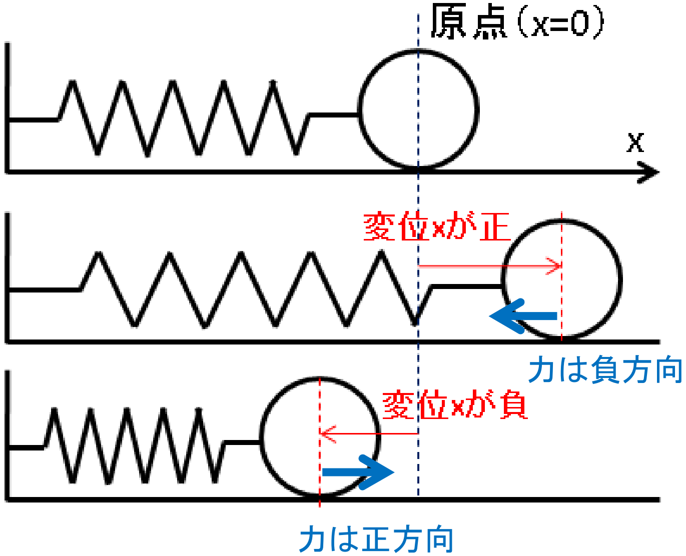
桑名分 第9回（2018/05/18）
運動方程式（F=ma）の例
バネの運動

[参考文献]　佐藤実著「マンガでわかる微分方程式」オーム社(2009年）
ISBN978-4-274-06786-0

復習:運動方程式

- ニュートンの力学の第二法則(質量×加速度=力):$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$
- 例:「ばね定数k のばねにつながれた質量m のおもりの運動」を表す方程式。摩擦力は無視。おもりの原点からの変位をxとして

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$



- 加速度$\frac{d^2x}{dt^2}$が大きいのは:
  - ➢ kが大きいとき
  - ➢ mが小さいとき
  - ➢ xが正で、絶対値が大きいほど負(原点方向)に向かう力が強い
  - ➢ xが負で、絶対値が大きいほど正(原点方向)に向かう力が強い

ばねの運動(抵抗力・外力なし)

- 運動方程式: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$ (弾性力のみ)
- 解析的に解ける(2階同次微分方程式)

$x(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ …① 【ただし $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$ A, B : 定数】

- 確認。式①を微分

$$\frac{dx(t)}{dt} = \omega A\cos\omega t - \omega B\sin\omega t$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2 A\sin\omega t - \omega^2 B\cos\omega t$$

もとの運動方程式に代入する。

左辺: $m(-\omega^2 A\sin\omega t - \omega^2 B\cos\omega t)$

$$= m\left(-\frac{k}{m}A\sin\omega t - \frac{k}{m}B\cos\omega t\right)$$

$$= -k(A\sin\omega t + B\cos\omega t) = -kx(t)$$:右辺

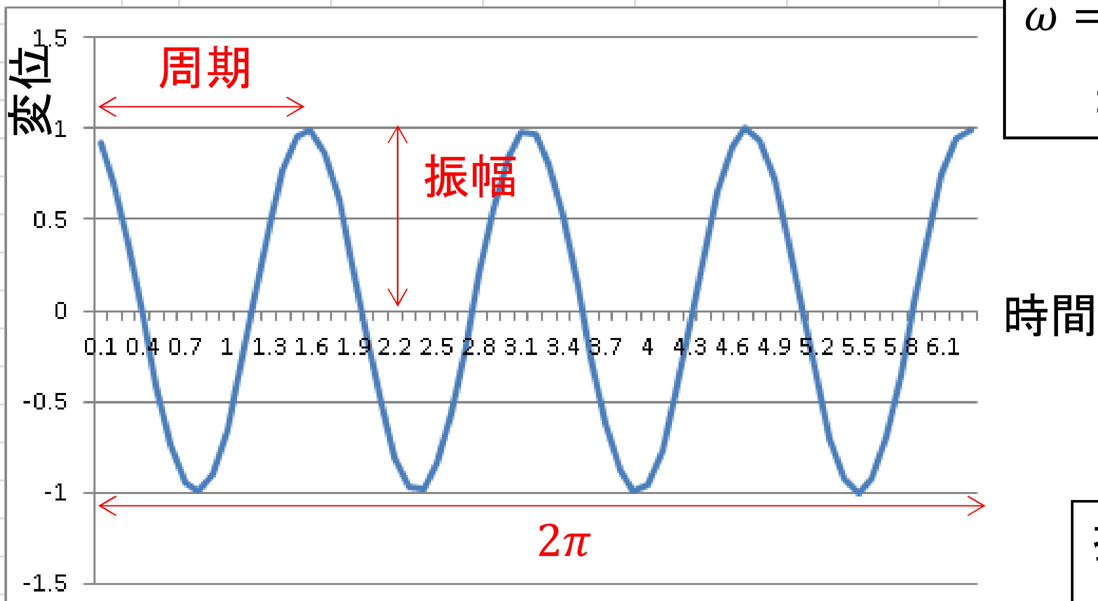
- たしかに式①は運動方程式の解になっている。

ばねの運動(抵抗力・外力なし)

- 例: x_0だけおもりをひっぱって、静かに手を離す
  - 初期条件: $x(0) = x_0$、$\left[\dfrac{dx}{dt}\right]_{t=0} = 0$ を式①に代入する
  - $A = 0, B = x_0$となるので、解は $x(t) = x_0 \cos \omega t$
  - 適当にω =4, $x_0 = 1$としてExcelでグラフ描画

B2 =E$2*COS(E$1*A2)

	A	B	C	D	E
1	t	x		ω	4
2	0.1	0.921061		x0	1
3	0.2	0.696707			
4	0.3	0.362358			
5	0.4	-0.0292			
6	0.5	-0.41615			
7	0.6	-0.73739			
8	0.7	-0.94222			
9	0.8	-0.99829			
10	0.9	-0.89676			
11	1	-0.65364			
12	1.1	-0.30733			
13	1.2	0.087499			
14	1.3	0.468517			
15	1.4	0.775566			
16	1.5	0.960017			
17	1.6	0.993185			
18	1.7	0.869397			



x_0: 振幅

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$: 周期

$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

: 固有角振動数

振幅・周期一定
＝単振動

ばねの運動（抵抗力あり）

- 運動方程式： $m\frac{d^2x}{dt^2} = -c\frac{dx}{dt} - kx$
- 抵抗力（摩擦力）： $-c\frac{dx}{dt}$
  速度に比例。速度と反対方向に働く。空気抵抗や摩擦力。
- $\frac{k}{m} = \omega^2, \frac{c}{m} = 2\gamma$ とおくと、
  運動方程式は $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$ …②

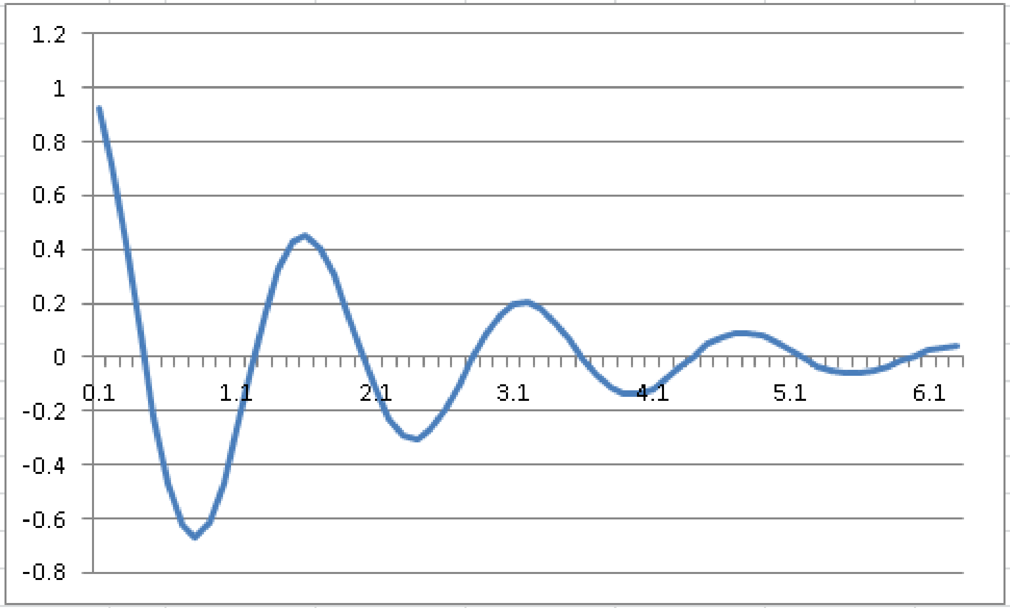
- 解析的に解いた結果
  - $\omega^2 > \gamma^2$: $x(t) = \alpha e^{-\gamma t + i\Omega t} + \beta e^{-\gamma t - i\Omega t},\ \Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$
  - $\omega^2 = \gamma^2$: $x(t) = (\alpha + \beta)e^{-\gamma t}$
  - $\omega^2 < \gamma^2$: $x(t) = \alpha e^{-\gamma t + \Gamma t} + \beta e^{-\gamma t - \Gamma t},\quad \Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$
  - α, βは任意の定数

ばねの運動(抵抗力あり: $\omega^2 > \gamma^2$)

- $x(t) = \alpha e^{-\gamma t + i\Omega t} + \beta e^{-\gamma t - i\Omega t}$, $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$
- p.4と同じ例(x_0だけおもりをひっぱって、静かに手を離す)
  このとき解は $x(t) = e^{-\gamma t} x_0 \left(\cos \Omega t + \frac{\gamma}{\Omega} \sin \Omega t \right)$
- 適当にω =4, $x_0 = 1, \gamma = 0.5$としてExcelでグラフ描画

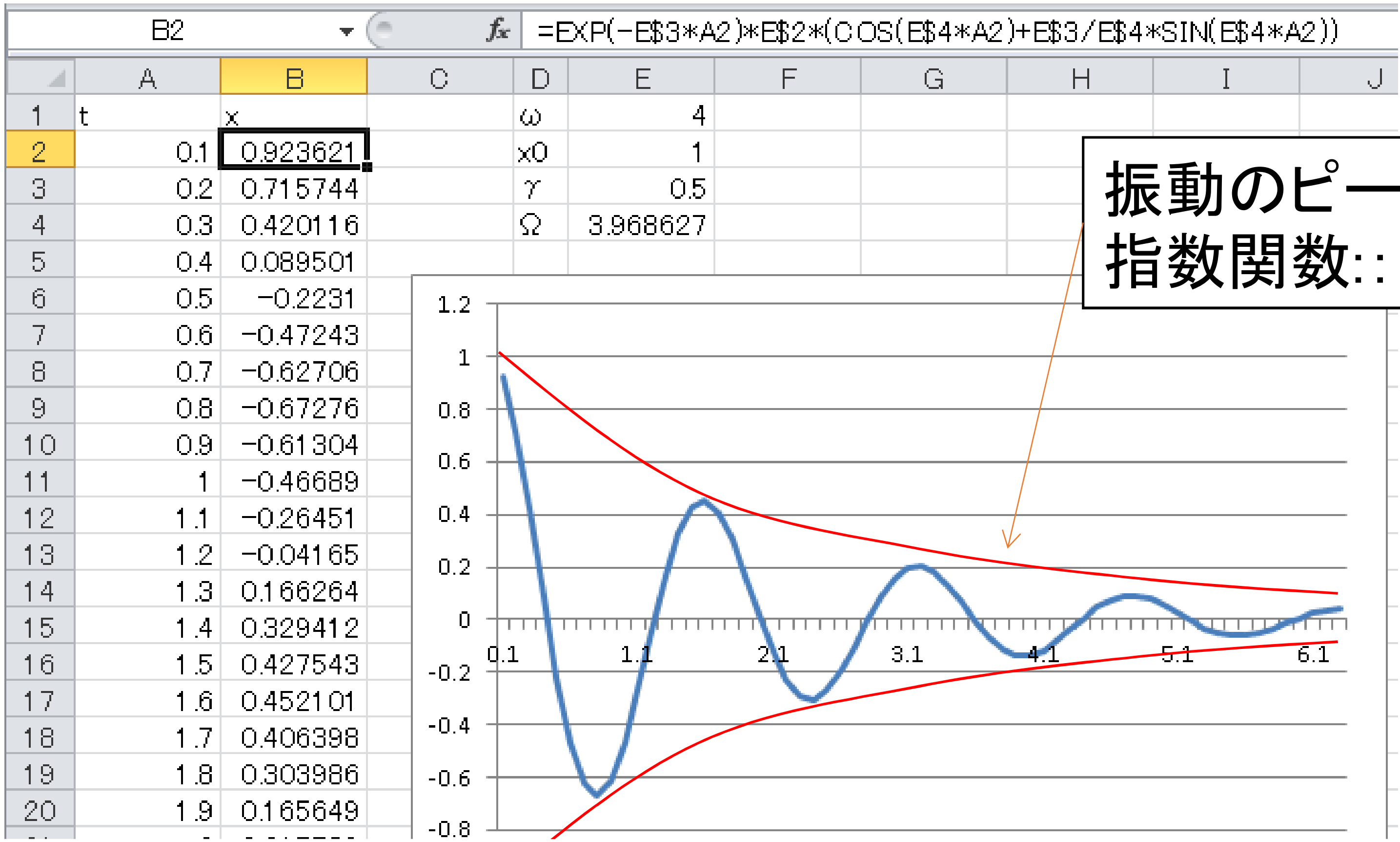
B2 | f_x =EXP(-E$3*A2)*E$2*(COS(E$4*A2)+E$3/E$4*SIN(E$4*A2))

	A	B	C	D	E
1	t	x		ω	4
2	0.1	0.923621		x0	1
3	0.2	0.715744		γ	0.5
4	0.3	0.420116		Ω	3.968627
5	0.4	0.089501			
6	0.5	-0.2231			
7	0.6	-0.47243			
8	0.7	-0.62706			
9	0.8	-0.67276			
10	0.9	-0.61304			
11	1	-0.46689			
12	1.1	-0.26451			
13	1.2	-0.04165			
14	1.3	0.166264			
15	1.4	0.329412			
16	1.5	0.427543			
17	1.6	0.45201			
18	1.7	0.406398			
19	1.8	0.303986			
20	1.9	0.165649			
21	2	0.015589			



ばねの運動(抵抗力あり: $\omega^2 > \gamma^2$)

- 減衰振動
- 振幅減衰率(振幅が減る速さ): γ
- 時定数:$\tau = \frac{1}{\gamma}$, 対数減衰率:$\frac{T}{\tau} = \frac{2\pi\gamma}{\Omega}$
- 周期: $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} > \frac{2\pi}{\omega}$(単振動の周期より長い)



B2 =EXP(-E$3*A2)*E$2*(COS(E$4*A2)+E$3/E$4*SIN(E$4*A2))

	A	B	C	D	E
1	t	x		ω	4
2	0.1	0.923621		x0	1
3	0.2	0.715744		γ	0.5
4	0.3	0.420116		Ω	3.968627
5	0.4	0.089501			
6	0.5	-0.2231			
7	0.6	-0.47243			
8	0.7	-0.62706			
9	0.8	-0.67276			
10	0.9	-0.61304			
11	1	-0.46689			
12	1.1	-0.26451			
13	1.2	-0.04165			
14	1.3	0.166264			
15	1.4	0.329412			
16	1.5	0.427543			
17	1.6	0.45201			
18	1.7	0.406398			
19	1.8	0.303986			
20	1.9	0.165649			

振動のピークを結ぶ線
指数関数:: $e^{-\gamma t}$

ばねの運動(抵抗力あり: $\omega^2 > \gamma^2$)

- 減衰振動の例
  抵抗を調整するダンパーという装置を付けて早く減衰させる
  - 自転車のサスペンション(バネ)
  - スイングドアのドアクローザー

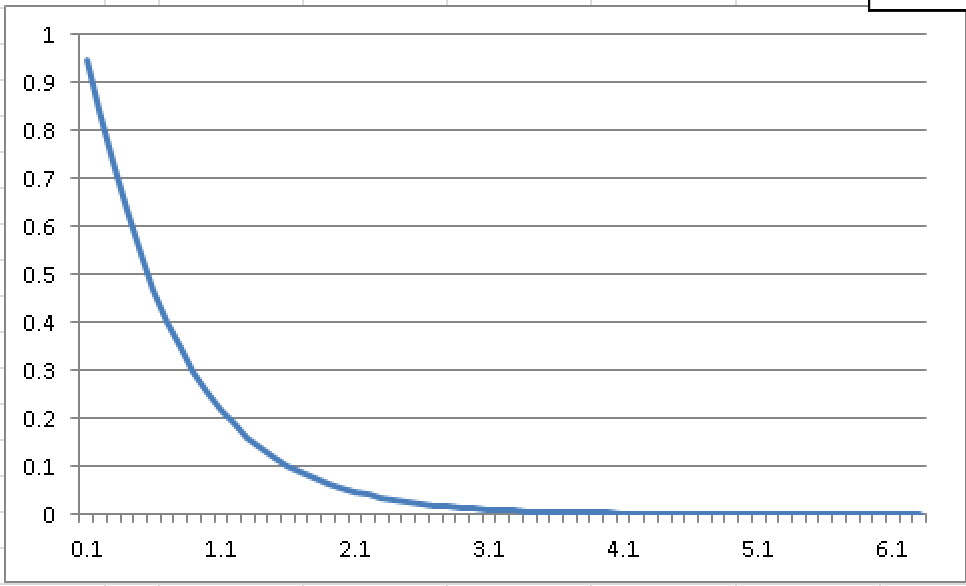
画像割愛

ばねの運動（抵抗力あり: $\omega^2 < \gamma^2$ ）

- $x(t) = \alpha e^{-\gamma t + \Gamma t} + \beta e^{-\gamma t - \Gamma t}, \quad \Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$
- p.4と同じ例（x_0だけおもりをひっぱって、静かに手を離す）
  このとき解は　$x(t) = e^{-\gamma t} x_0 \left(\cosh \Gamma t + \frac{\gamma}{\Gamma} \sinh \Gamma t \right)$
- 適当にω =4, $x_0 = 1, \gamma = 6$としてExcelでグラフ描画

B2　f_x =EXP(-E$3*A2)*E$2*(COSH(E$4*A2)+E$3/E$4*SINH(E$4*A2))

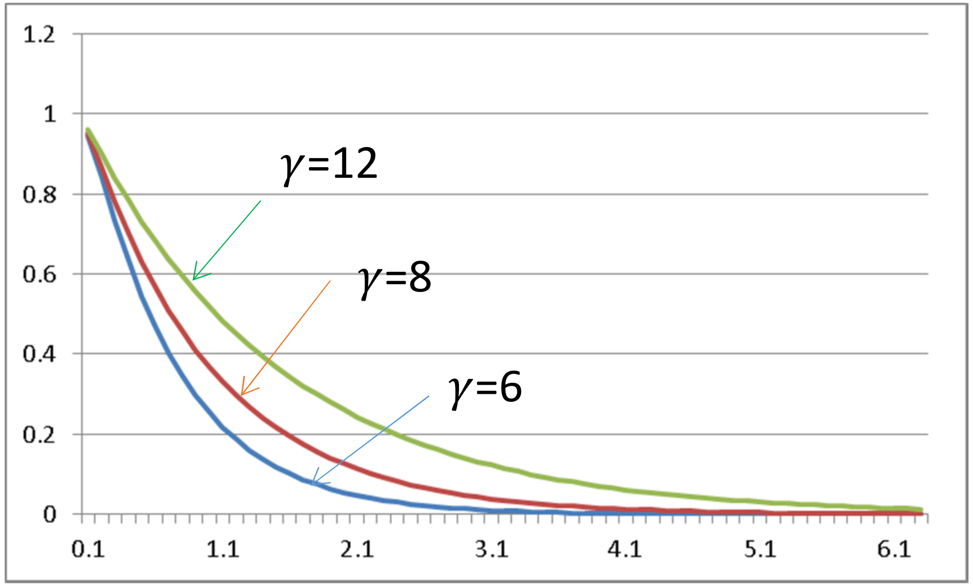
	A	B	C	D	E
1	t	x		ω	4
2	0.1	0.944987		x0	1
3	0.2	0.84151		γ	6
4	0.3	0.732952		Γ	4.472136
5	0.4	0.632848			
6	0.5	0.544496			
7	0.6	0.467809			
8	0.7	0.401688			
9	0.8	0.344831			
10	0.9	0.295993			
11	1	0.254062			
12	1.1	0.218067			
13	1.2	0.18717			
14	1.3	0.160651			
15	1.4	0.137889			
16	1.5	0.118352			
17	1.6	0.101583			
18	1.7	0.08719			
19	1.8	0.074836			
20	1.9	0.064233			
21	2	0.055132			



振動せずに減衰
過減衰

ばねの運動（抵抗力あり：$\omega^2 < \gamma^2$ ）

- どの程度ゆっくり減衰するのかは、γによる



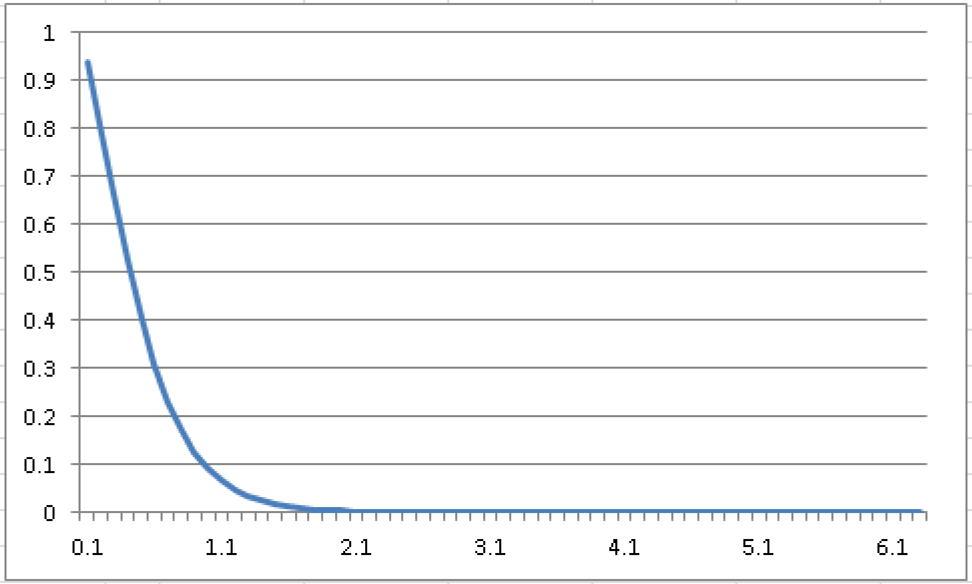
- 一般解：$x(t) = \alpha e^{-\gamma t+\Gamma t} + \beta e^{-\gamma t-\Gamma t}$, $\Gamma = \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$
- $e^{-\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}$ ：tが大きくなるとすぐに減衰していく
  $e^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}$ ：なかなか減衰しない
  全体としてゆっくり減衰していく
- 実例：ゆっくり開くフタやドアなど

ばねの運動(抵抗力あり: $\omega^2 = \gamma^2$)

- $x(t) = (\alpha + \beta)e^{-\gamma t}$
- p.4と同じ例(x_0だけおもりをひっぱって、静かに手を離す)
  このとき解は $x(t) = x_0(1 + \gamma t)e^{-\gamma t}$
- 適当に$\omega = \gamma$ =4, $x_0 = 1$ としてExcelでグラフ描画
- 臨界減衰

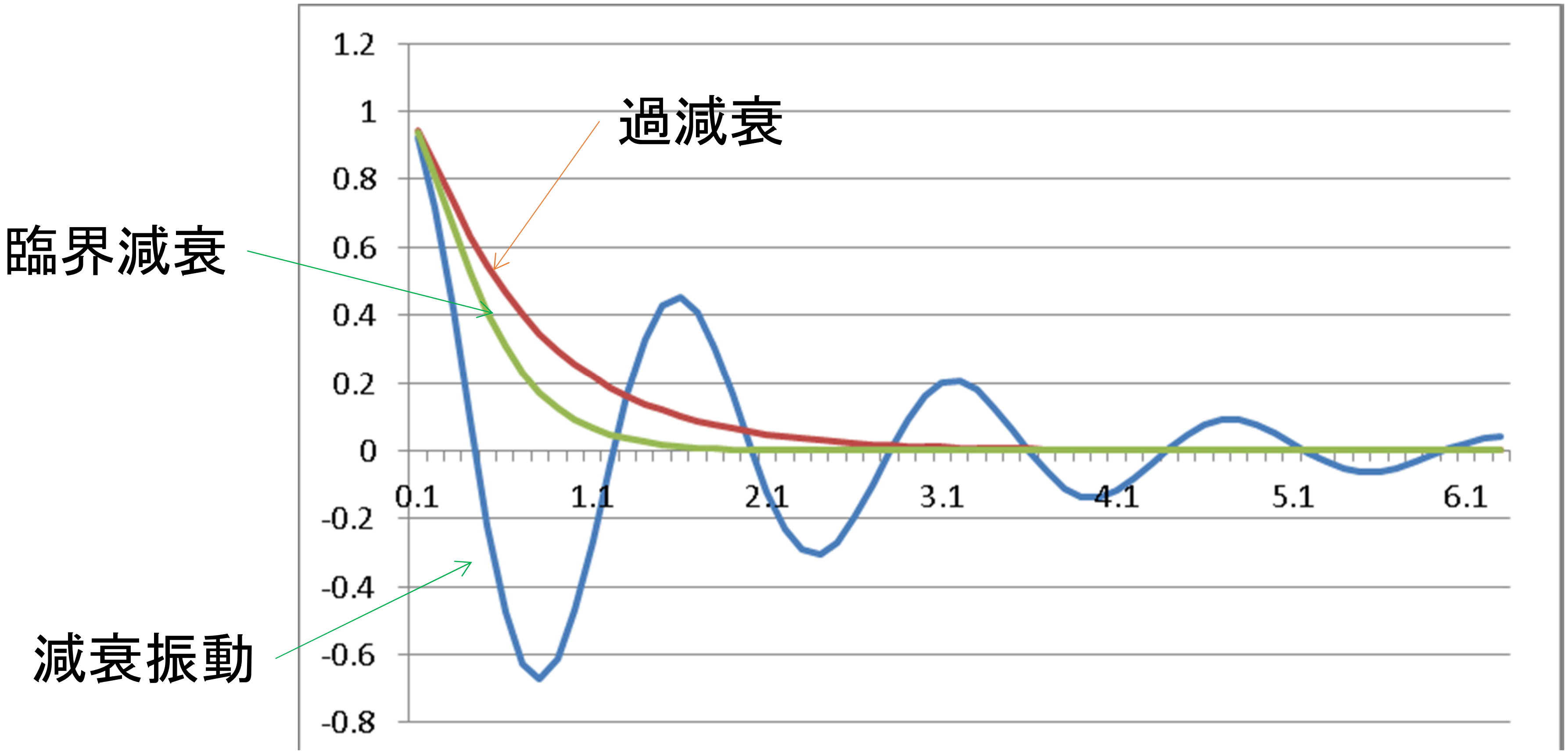
B2 | =E$2*(1+E$3*A2)*EXP(-E$3*A2)

	A	B	C	D	E
1	t	x		ω	4
2	0.1	0.938448		x0	1
3	0.2	0.808792		γ	4
4	0.3	0.662627			
5	0.4	0.524931			
6	0.5	0.406006			
7	0.6	0.308441			
8	0.7	0.231078			
9	0.8	0.171201			
10	0.9	0.125689			
11	1	0.091578			
12	1.1	0.066298			
13	1.2	0.047733			
14	1.3	0.034203			
15	1.4	0.024406			
16	1.5	0.017351			
17	1.6	0.012296			
18	1.7	0.008687			
19	1.8	0.006122			
20	1.9	0.004304			
21	2	0.003019			



ばねの運動(抵抗力ありの場合まとめ)

- ドアクローザーは臨界減衰に設定してある。
  - 臨界減衰:すばやく閉じてきて、ゆっくり閉まる
  - 減衰振動:閉じきる瞬間(変位ゼロ)が最も速い(危ない)
  - 過減衰:すごくゆっくり閉まる
- メーターの針の動きも臨界減衰(測定しやすい)



ばねの運動（抵抗力・外力あり）

- 運動方程式： $m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$
- 外力は、時間に依存する周期的な力である場合が多い。
  （一定の力を与え続けると、ばねが伸びきってしまう）
  例として、放っておくと減衰していく振動を持続させることを目的に
  $F(t)=F_0\cos\nu t$

- $\frac{k}{m}=\omega^2, \frac{c}{m}=2\gamma\ , \frac{F_0}{m}=f$ とおくと、
  運動方程式は $\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega^2x=f\cos\nu t$ …③
- 強制振動

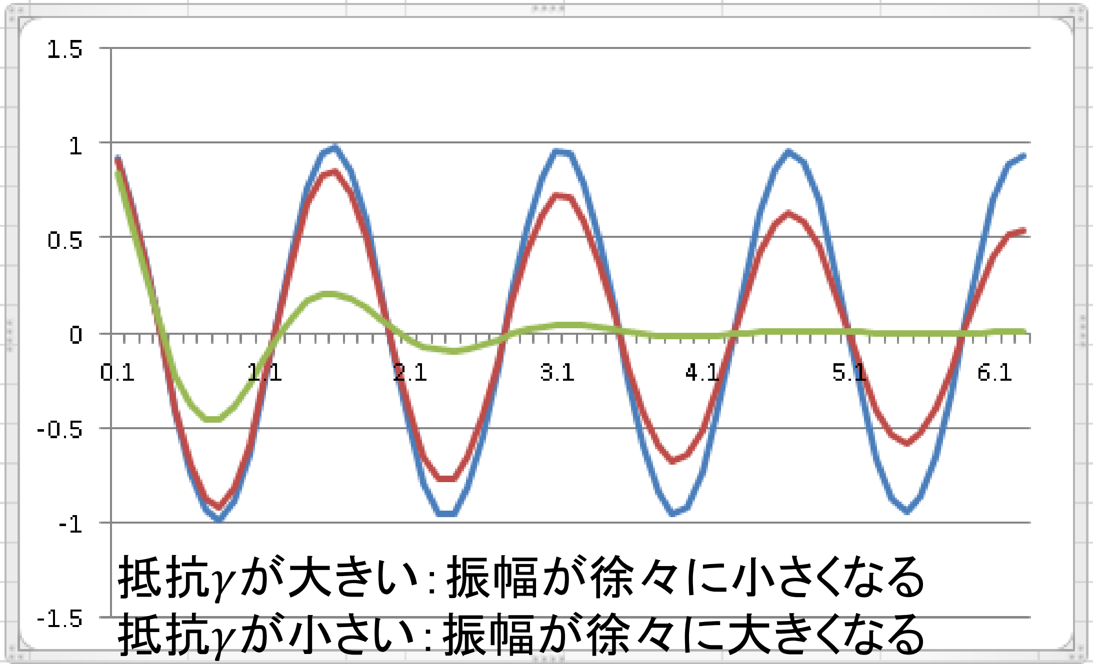
- 解析的に解いた結果
  減衰振動$(\omega^2>\gamma^2)$を想定： $x(t)=e^{-\gamma t}(a\cos\Omega t+b\sin\Omega t)+\frac{\omega^2-\nu^2}{(\omega^2-\nu^2)^2+(2\gamma\nu)^2}f\cos\nu t+\frac{2\gamma\nu}{(\omega^2-\nu^2)^2+(2\gamma\nu)^2}f\sin\nu t,\quad \Omega=\sqrt{\omega^2-\gamma^2}$

ばねの運動（抵抗力・外力あり）

- p.4と同じ例（x_0だけおもりをひっぱって、静かに手を離す）
- 外力の角振動数νと、ばねの固有角振動数ωが等しいとする（共振、共鳴）

このとき解は $x(t) = e^{-\gamma t}\left(x_0 \cos \Omega t + - \frac{f}{2\gamma\Omega} \sin \Omega t\right) + \frac{f}{2\gamma\omega} \sin \omega t$

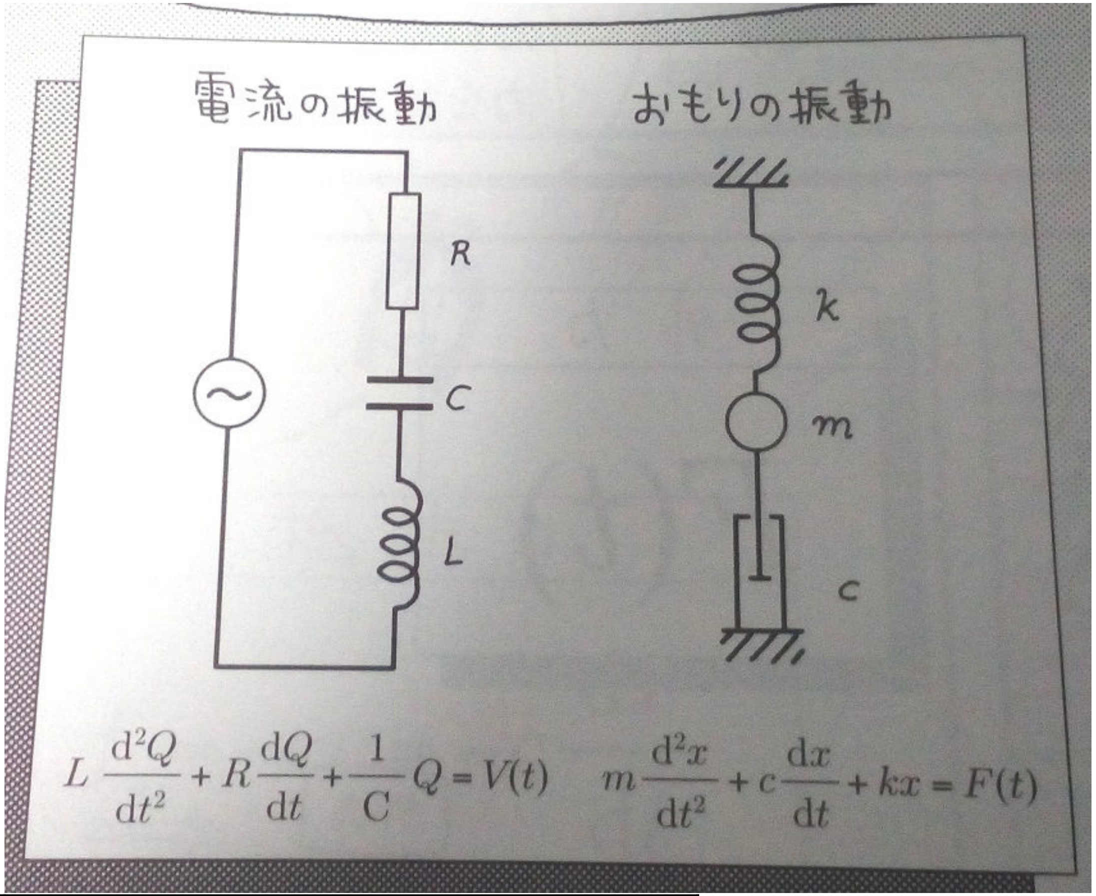
ω	4	4	4
x0	1	1	1
γ	0.01	0.1	1
Ω	3.999987	3.99875	3.872983
f	1	1	1



ばねの運動(まとめ)

- 外力項の有無やパラメータによって運動が変わる

- 回路中を流れる電流の振動も同じようなモデルで表すことができる



回路	ばね
インダクタンス(L)	慣性(質量)
電気容量(C)	弾性(ばねの力)
電気抵抗(R)	抵抗(空気抵抗・摩擦)

復習:4次のルンゲ･クッタ法

- 4次のルンゲ･クッタ法(単に「ルンゲ･クッタ法」)

  $$P(t+\Delta t) = P(t) + \frac{\Delta t}{6}(S_1 + 2S_2 + 2S_3 + S_4)$$

  ただし $S_1 = f\big(t, P(t)\big)$ $S_2 = f\left(t + \frac{\Delta t}{2},\ P(t) + \frac{\Delta t \times S_1}{2}\right)$

  $S_3 = f\left(t + \frac{\Delta t}{2},\ P(t) + \frac{\Delta t \times S_2}{2}\right)$ $S_4 = f(t + \Delta t,\ P(t) + \Delta t \times S_3)$

ルンゲ･クッタ法

- ルンゲ･クッタ法で2階微分方程式$\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x, v)$を解く
  - $\frac{dx}{dt} = v(t, x, v)$ とおく。
  - $\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x, v)$ は $\frac{dv}{dt} = f(t, x, v)$ と置き換えられる。
- 4次のルンゲクッタ法は
  - $S_1 = v(t, x, v)$　※vそのもの
    $P_1 = f(t, x, v)$
  - $S_2 = v\left(t + \frac{\Delta t}{2},\ x + \frac{\Delta t \times S_1}{2}, v + \frac{\Delta t \times P_1}{2}\right)$　※$v + \frac{\Delta t \times P_1}{2}$
    $P_2 = f\left(t + \frac{\Delta t}{2},\ x + \frac{\Delta t \times S_1}{2}, v + \frac{\Delta t \times P_1}{2}\right)$
  - $S_3 = v\left(t + \frac{\Delta t}{2},\ x + \frac{\Delta t \times S_2}{2}, v + \frac{\Delta t \times P_2}{2}\right)$
    $P_3 = f\left(t + \frac{\Delta t}{2},\ x + \frac{\Delta t \times S_2}{2}, v + \frac{\Delta t \times P_2}{2}\right)$
  - $S_4 = v(t + \Delta t,\ x + \Delta t \times S_3, v + \Delta t \times P_3)$
    $P_4 = f(t + \Delta t,\ x + \Delta t \times S_3, v + \Delta t \times P_3)$
  - $x(t + \Delta t) = x(t) + \frac{\Delta t}{6}(S_1 + 2S_2 + 2S_3 + S_4)$
    $v(t + \Delta t) = v(t) + \frac{\Delta t}{6}(P_1 + 2P_2 + 2P_3 + P_4)$

ルンゲ・クッタ法

- p.13の$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = A\cos\nu t$ を解いてみる
- $\frac{d^2x}{dt^2} = f(t,x,v)$ とすると、$f(t,x,v) = -2\gamma\frac{dx}{dt} - \omega^2 x + A\cos\nu t$
  $\frac{dx}{dt} = v(t,x,v)$ とおく。
  $\frac{d^2x}{dt^2} = f(t,x,v)$ は $\frac{dv}{dt} = f(t,x,v)$ と置き換え。
- サンプル（spring1.c）