小林研朝ゼミ

桑名分 第16回 (2018/07/03)
レイノルズ数が大きい流れ２

次回予定：2018/07/06　金曜日

【第15回の再掲】レイノルズ数の大きい流れは解きづらい

- 最小スケールの渦まで改造できるような細かい格子が必要
- 必要な格子数は$\mathrm{Re}^{\frac{9}{4}}$と見積もられている
- 格子を細かくすればすべて解決？
  - ➢ 格子数が膨大→計算時間も膨大→現実的でない
  - ➢ 格子幅（DX,DY）、時間刻み幅が小さい（DT）
    →実数の型を、Real型からdouble precision型に

- 工学的に重要な量は、
  小さなスケールの乱雑な運動（小さな渦）ではなく
  乱流によって生成される大きなスケールの運動や
  運動による物理量の輸送
- ミクロな変動量を、マクロな量* と関連付ける工夫
  *現実的な大きさの格子で解析できる　→乱流モデル
- 差分に工夫　→三次精度上流差分

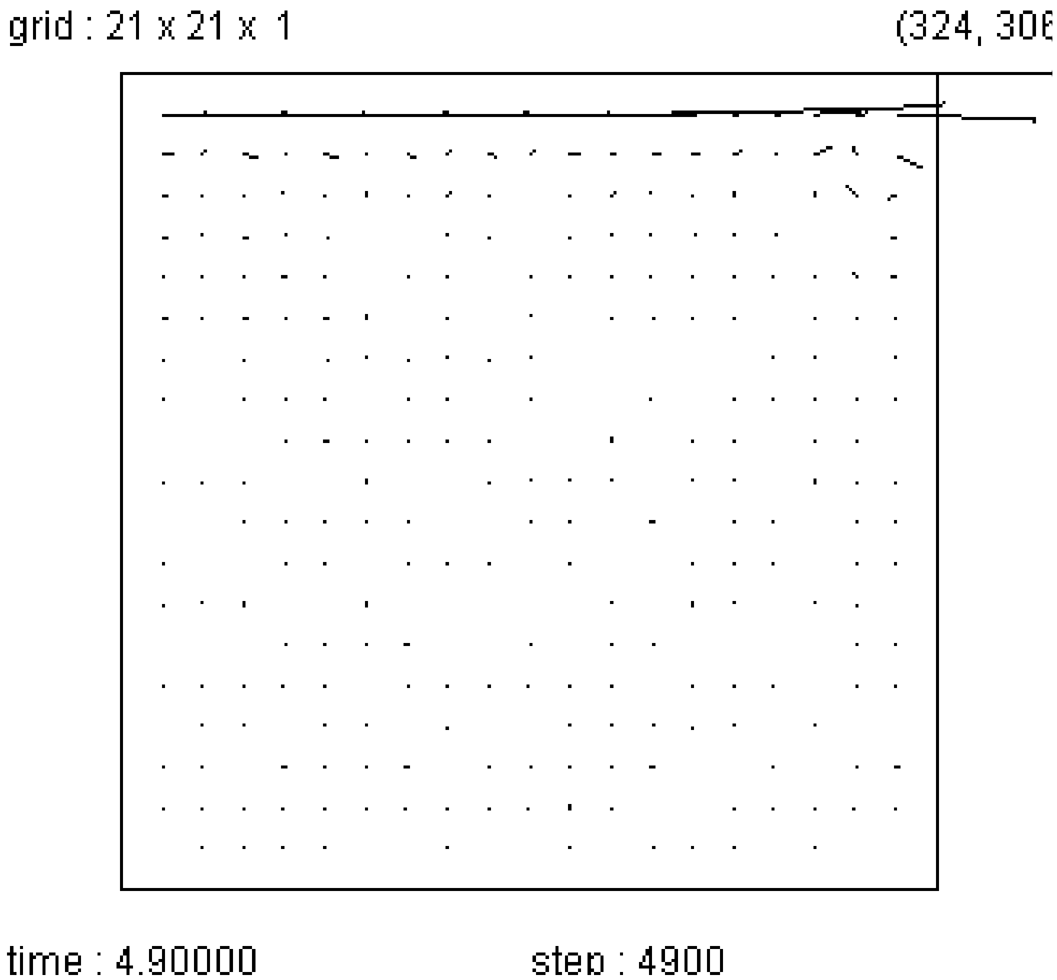
【お詫び】プログラムに間違い

- 6月19日のサンプルプログラム（cavity.f90）

【誤】
```
!Boundary condition
do i=0,MX
 （略）
end do
do j=0,MY
  （略）
end do
```

【正】
```
!Boundary condition
do i=1,MX
 （略）
end do
do j=1,MY
  （略）
end do
```

修正しても
Re=10000だと、こうなる↓



差分の方法を工夫してみる

【再掲】第12回p. 8　フラクショナル・ステップ法

$$u^* = u^n + \Delta t \left\{ -u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} \right) \right\}$$

$$v^* = v^n + \Delta t \left\{ -u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} - v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} \right) \right\}$$

$$\frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p^{n+1}}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right)$$

$$u^{n+1} = u^* - \Delta t \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x}$$

$$v^{n+1} = v^* - \Delta t \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y}$$

$$\begin{tikzcd}
u^0, v^0 \arrow[d] & & & \\
u^*, v^* \arrow[rr] \arrow[dr] & & p^1 \arrow[dl] & \\
& u^1, v^1 \arrow[d] & & \\
& u^*, v^* \arrow[rr] \arrow[dr] & & p^2 \arrow[dl] \\
& & u^2, v^2 \arrow[d] & \\
& & &
\end{tikzcd}$$

Time evolution
時間発展

差分の方法を工夫してみる

【再掲】第12回p. 9　差分化・差分近似

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

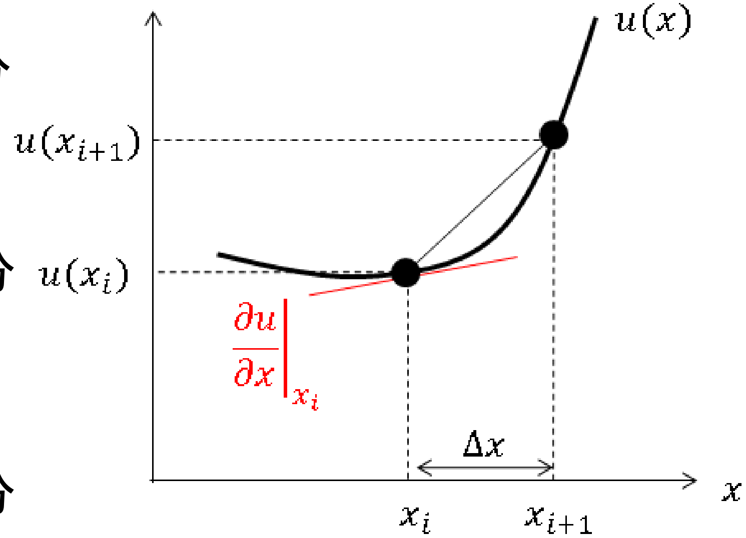
・・・前進差分

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u(x)-u(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

・・・後退差分

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u(x+\Delta x)-u(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

・・・中心差分



例

$$u^* = u^n + \Delta t \left\{ \boxed{-u^n \frac{\partial u^n}{\partial x}} - v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} + \frac{1}{\mathrm{Re}} \left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} \right) \right\}$$

この項を中心差分で近似した例

$$-u^n(x,y)\frac{u^n(x+\Delta x,y)-u^n(x-\Delta x,y)}{2\Delta x}$$

上流差分

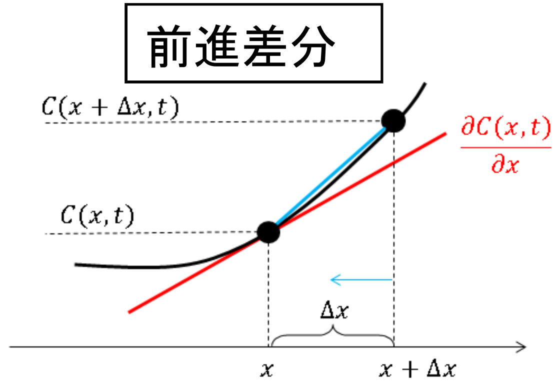
【再掲】第5回p. 6　移流方程式

$$\frac{\partial C(x,t)}{\partial t} = -f\frac{\partial C(x,t)}{\partial x}$$

C：インク濃度　x：位置座標
t：時間　　f：移流速度（正の定数）

時間微分：前進差分
空間微分：後退差分を使う
（$f>0$：インクは左から来るので）

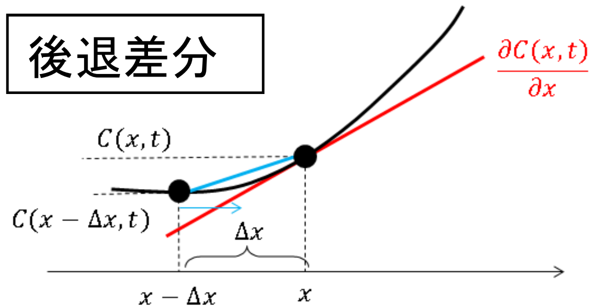
$$\frac{C(x,t+\Delta t)-C(x,t)}{\Delta t} = -f\frac{C(x,t)-C(x-\Delta x,t)}{\Delta x}$$



「左辺：未来、右辺：現在」の形に移項

$$C(x,t+\Delta t) = (1-r)C(x,t) + rC(x-\Delta x,t)$$

ただし　$r = f\Delta t/\Delta x$



上流差分

物理量：Cからuに記号を変更。後退差分を書き直し

$$f\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_i} = f\frac{u(x,t)-u(x-\Delta x,t)}{\Delta x} \qquad \rightarrow 略記：f\frac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x}$$

移流速度$f>0$とは限らない

→fの方向に応じて上流側の点を使う　→上流差分

$$f\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_i} = \begin{cases} f\dfrac{u_i-u_{i-1}}{\Delta x} & (f \geq 0) \\ f\dfrac{u_{i+1}-u_i}{\Delta x} & (f < 0) \end{cases}$$

絶対値を使ってひとつの式にまとめる

$$f\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_i} = \underbrace{f\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x}}_{f\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\text{の中心差分}} - \frac{|f|\Delta x}{2}\underbrace{\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{(\Delta x)^2}}_{\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\text{の差分}}$$

上流差分を使って差分化

p. 4の例

$$u^* = u^n + \Delta t\left\{\underbrace{-u^n\frac{\partial u^n}{\partial x} - v^n\frac{\partial u^n}{\partial y}}_{\text{移流項}} + \underbrace{\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2}\right)}_{\text{拡散項・粘性項}}\right\}$$

Reが小さい
＝粘性項が大きい
＝どろっとした流体

移流項は上流差分、粘性項は中心差分で差分化

n は省略。 $u(x,y)$を$u_{i,j}$、$u(x+\Delta x, y)$を$u_{i+1,j}$　などと略記。

$$\begin{aligned}u^* = u + \Delta t\Bigg\{&\left(-u\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{|u|\Delta x}{2}\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2}\right)\\ &+\left(-v\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2\Delta y} + \frac{|v|\Delta y}{2}\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}\right)\\ &+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{(\Delta y)^2}\right)\Bigg\}\end{aligned}$$

整理すると、結局

- ・移流項を中心差分で近似
- ・粘性項に新たな項が加わる（数値拡散項）
  →本来の粘性項より大きい結果が出てしまう。
  → $\Delta x, \Delta y$を充分細かくとる必要がある。

高次の上流差分（→詳細は別紙）

一次精度上流差分

$$f\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_i} = f\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{|f|\Delta x}{2}\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

二次精度上流差分

$$f\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_i} = f\frac{-u_{i+2}+4(u_{i+1}-u_{i-1})+u_{i-2}}{4\Delta x} + \frac{|f|\Delta x^3}{4}\frac{u_{i+2}-4u_{i+1}+6u_i-4u_{i-1}+u_{i-2}}{(\Delta x)^4}$$

三次精度上流差分

$$f\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_i} = f\frac{-u_{i+2}+8(u_{i+1}-u_{i-1})+u_{i-2}}{12\Delta x} + \frac{|f|\Delta x^3}{12}\frac{u_{i+2}-4u_{i+1}+6u_i-4u_{i-1}+u_{i-2}}{(\Delta x)^4}$$

三次精度上流差分

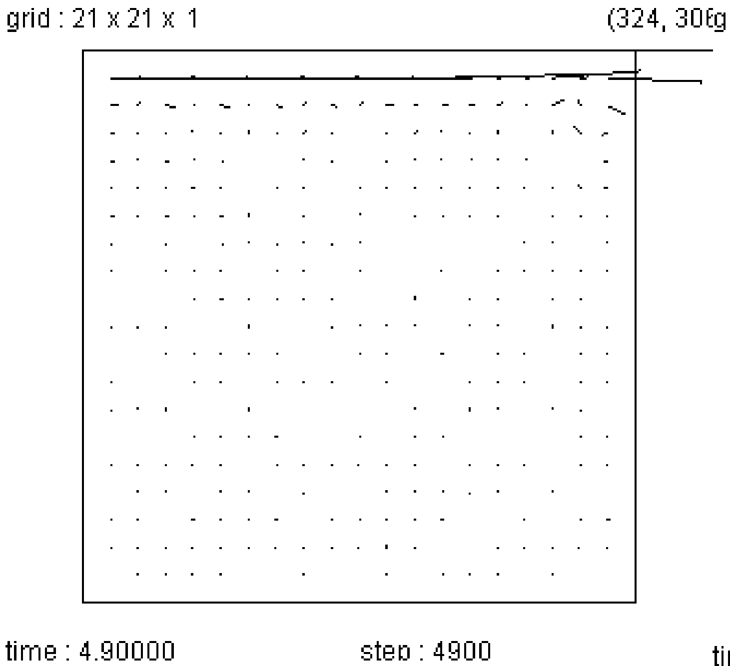
```
do j=2,MY-1      !Calculate u*, v*
  do i=2,MX-1
    !移流項だけ先に。端は一次精度の上流差分（左右に2点ずつ取れないので）
    if(j==2 .or. j==MY-1 .or. i==2 .or. i==MX-1) then
      UN=   U(i,j) *(U(i+1,j)-U(i-1,j))/2.0*DX &
       -abs(U(i,j))*(U(i+1,j)-2.*U(i,j)+U(i-1,j))/2.0*DX &
           +V(i,j) *(U(i,j+1)-U(i,j-1))/2.0*DY &
       -abs(V(i,j))*(U(i,j+1)-2.*U(i,j)+U(i,j-1))/2.0*DY
     （VNも同様に。省略）
    else
      !端以外は三次精度の上流差分
      UN=U(i,j)*(-U(i+2,j)+8.*(U(i+1,j)-U(i-1,j))+U(i-2,j))/12.*DX &
    +abs(U(i,j))*(U(i+2,j)-4.*U(i+1,j)+6.*U(i,j) &
                      -4.*U(i-1,j)+U(i-2,j))/12.*DX &
       +V(i,j)*(-U(i,j+2)+8.*(U(i,j+1)-U(i,j-1))+U(i,j-2))/12.*DY &
    +abs(V(i,j))*(U(i,j+2)-4.*U(i,j+1)+6.*U(i,j) &
                      -4.*U(i,j-1)+U(i,j-2))/12.*DY
    end if
    UT(i,j)=U(i,j)+DT*( -UN &
            +1.0/RE*((U(i+1,j)-2.0*U(i,j)+U(i-1,j))/(DX*DX) &
                    +(U(i,j+1)-2.0*U(i,j)+U(i,j-1))/(DY*DY)))
```

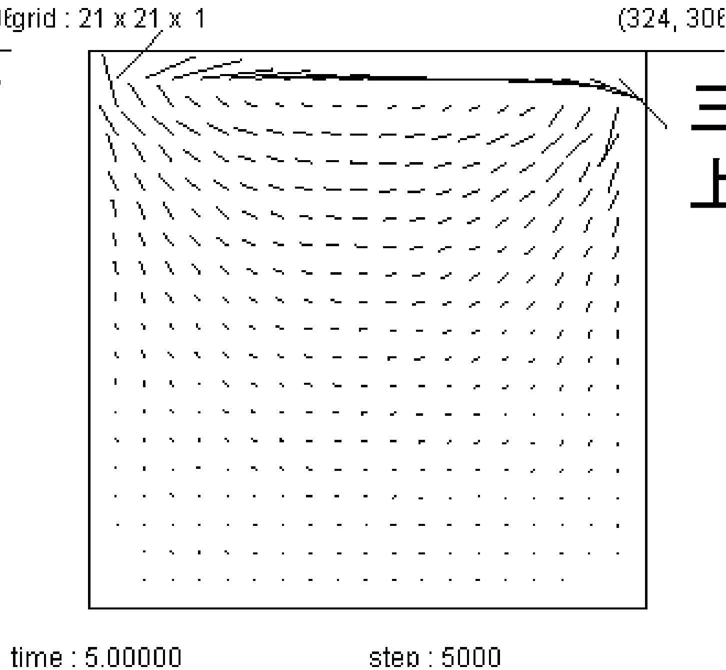
三次精度上流差分

差分以外すべて同じ条件で、Re=10000の計算。

- 境界条件：p.3の通り修正
- 格子数：21x21
- 実数の変数の型：real

中心差分





三次精度上流差分

だいぶ渦に近づいたが
まだ実験結果には遠い。