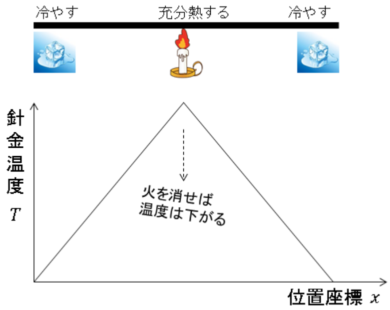


現象

「針金の両端を氷で冷やす。真ん中を熱する。
充分に熱したところで火を消したらどうなるか？」

今日解きたい式

温度分布を表す方程式（熱拡散方程式、熱伝導方程式）

$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$　…式(1)

T：温度，t：時間，x：針金上の位置座標，k：熱拡散率（定数）

まずはそれぞれの記号を見てみます。

- $T(x,t)$：針金の温度Tは、時間tが経つにつれて変わっていきます。針金の位置xによっても異なります（例：火の近くは熱い）。言い換えると「未知関数Tは二つの独立変数xとtをもつ関数」です。たとえば「熱するのを止めてから 0.2 秒後（$t = 0.2$）の、左から 0.3m の場所（$x = 0.3$）での温度Tはいくつですか？」のように、tとxの値を指定すると、その時点・その地点での温度Tが特定できます。
- $\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$：温度$T$の、時間$t$による 1 階偏微分です。$\frac{\partial T}{\partial t}$と略することもあります。
- $\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$：温度$T$の、位置$x$による 2 階偏微分です。$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$と略することもあります。

式(1)を日本語で解釈すると「$\frac{\partial T}{\partial t}$は、$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$に比例定数$k$で比例する」です。

- $\frac{\partial T}{\partial t}$とは「温度の時間変化」「時間がほんの少したったあとに温度Tがどれだけ変化するか」を表します。もし、$\frac{\partial T}{\partial t} > 0$だったら、ほんの少し時間がたった後、その地点での針金は温まります。$\frac{\partial T}{\partial t} < 0$だったら冷えます。
- $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$の詳細は、今日は割愛します。
- k：熱拡散率は、物質によって決まっている定数です。たとえば、20 度の水の熱拡散率は 14×10^{-8}[m^2/s]、20 度のアルミニウムの熱拡散率は 9975×10^{-8}[m^2/s]です。
- 式(1)の右辺の値が大きければ（k または $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ が大きければ）、左辺（$\frac{\partial T}{\partial t}$）の値も大きくなります。
  - ➢ 熱拡散率kの値が大きいアルミニウムの方が、水よりも温度変化が大きい（熱しやすく冷めやすい）ことは直感的にも頷けます。
  - ➢ 針金上の温度差が大きい方が、温度変化も大きくなります。たとえば、
    (A) 針金のある点が 0 度、その隣の点での温度が 1 度 のとき　と
    (B) 針金のある点が 0 度、その隣の点での温度が 10 度のとき　では
    (B)の方が温度の差が大きいです。したがって温度変化も大きくなります。

式(1)を「熱拡散方程式」といいます。インクが水槽内の静止した水中を広がって行く様子や、煙が風のない空中を広がっていく様子も、同じ形の式「拡散方程式」で表すことができます（温度の場合は特別に「熱拡散方程式」といいます）。一般的な形の拡散方程式を以下に記載します。

一次元：$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$　…式(2)

二次元：$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = c \left\{ \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right\}$　…式(3)

三次元：$\frac{\partial u(x,y,z,t)}{\partial t} = c \left\{ \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,z,t)}{\partial z^2} \right\}$　…式(4)

u：インクや煙の濃度（物理量），t：時間，x, y, z：位置座標，c：拡散率・拡散係数（定数）

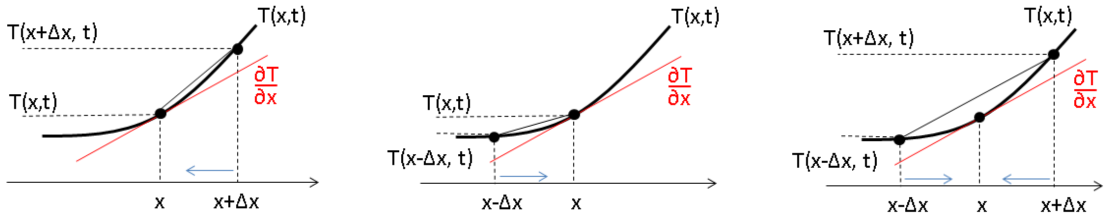
四次元：$\frac{\partial u(x_1,x_2,x_3,x_4,t)}{\partial t} = c \left\{ \frac{\partial^2 u(x_1,x_2,x_3,x_4,t)}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2 u(x_1,x_2,x_3,x_4,t)}{\partial {x_2}^2} + \frac{\partial^2 u(x_1,x_2,x_3,x_4,t)}{\partial {x_3}^2} + \frac{\partial^2 u(x_1,x_2,x_3,x_4,t)}{\partial {x_4}^2} \right\}$　…式(5)

微分を「差分」で近似する

・前進差分：$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \sim \frac{T(x+\Delta x,t)-T(x,t)}{\Delta x}$

・後退差分：$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \sim \frac{T(x,t)-T(x-\Delta x,t)}{\Delta x}$　　　いずれも $\Delta x \to 0$ の極限で、左辺に一致します。

・中心差分：$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \sim \frac{T(x+\Delta x,t)-T(x-\Delta x,t)}{2\Delta x}$



前進差分　　　後退差分　　　中心差分

式(1)の左辺（時刻t, 針金上の位置xにおける温度Tの、時間による偏微分）の定義は：

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{T(x,t+\Delta t)-T(x,t)}{\Delta t}\right) \quad \cdots 式(6)$$

この偏微分の意味は「xは固定してtの変化のみを考える」です。「ある地点における温度の時間変化」と思ってください。

Δtは充分小さい値として、微分を差分で近似します：$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \sim \frac{T(x,t+\Delta t)-T(x,t)}{\Delta t}$　$\cdots$式(7)

式(1)の右辺も同様の手順で差分近似します。右辺は位置による偏微分ですので、「tは固定してxの変化のみを考える」です。「ある時刻において、針金上のある部分が、その周りの部分より熱いのか冷たいのか」について考えています。

$$\frac{\partial T^2(x,t)}{\partial x^2} \sim \frac{T(x+\Delta x,t)-2T(x,t)+T(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2} \quad \cdots 式(8)$$

式(1)：$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ は、式(7)(8)を用いて、以下のように差分近似できます。

$$\frac{T(x,t+\Delta t)-T(x,t)}{\Delta t} = k\frac{T(x+\Delta x,t)-2T(x,t)+T(x-\Delta x,t)}{\Delta x^2}$$

未来を表す項を左辺に、それ以外を右辺に移項して整理します。

$$T(x,t+\Delta t) = T(x,t) + \frac{k\Delta t}{\Delta x^2}\{T(x+\Delta x,t) - 2T(x,t) + T(x-\Delta x,t)\} \quad \cdots 式(9)$$

微分方程式を（コンピュータで、数値的に）解く

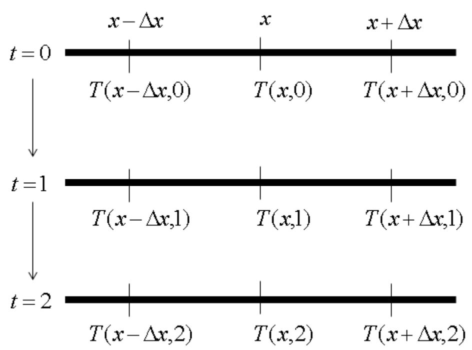
式(9)をコンピュータに計算してもらいます。現在（時刻t）の針金上の温度を用いて、一瞬先の未来（時刻$t+\Delta t$）の針金上の温度を求めます。

右図のように針金をΔx刻みに分割し、式(9)を使って針金上の点の温度分布を時間発展的に計算していきます。

$t = 0$のときの針金上の温度分布と、針金の左右端での温度は、あらかじめ条件として与えられています（両隣の点を使って計算するので、両端の点での値自体は計算できない）。

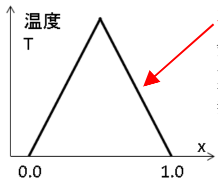
$t = 0$のときの針金の温度分布を**初期条件**

針金の左右端での温度を**境界条件**といいます。



プログラム：diffusion.c

- 長さ 1.0 の針金を 20 分割し、各点での温度の時間変化を計算
- 初期条件：$T(x,0) = 2x$　　　（$x < 0.5$　のとき）
  $T(x,0) = 2 - 2x$　　（$x \geq 0.5$　のとき）
- 境界条件：$T(0,t) = 0.0$、$T(1,t) = 0.0$
- 熱拡散率：$k = 1.0$
- 時間刻み幅：Δt =0.001　で　t =0.03まで 30 ステップ計算

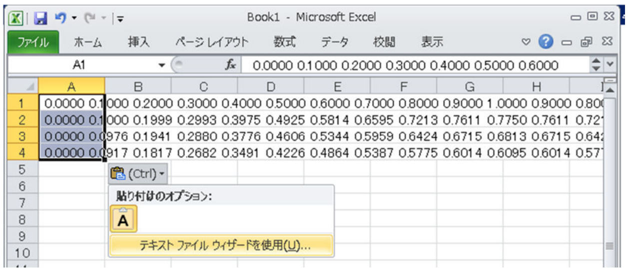


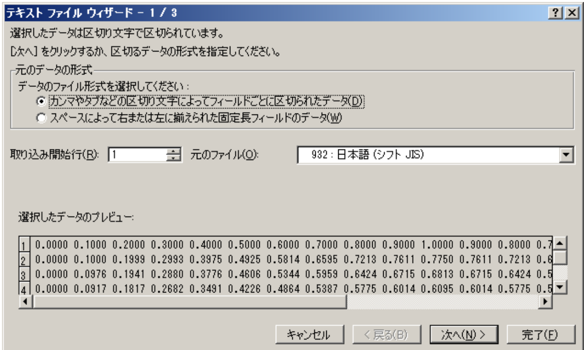
初期条件。
針金の左右端を氷で冷やし
真ん中を熱する。
熱するのを止めたら
どうなるか。

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main(){
  float TEMP[21],TEMP2[21];
  float dt,dx,k,c,x;
  int j,i,imax;

  FILE *fp;
  char f[256];
  fp=fopen("result_diffusion.txt","wt");  ←結果を書き込むファイル
  if(fp==NULL){
    printf("File open error.¥n");
    return -1;
  }

  imax=20;
  dt=0.001;
  dx=1.0/((float)(imax));
  k=1.0;
  c=k*dt/(dx*dx);

  for(i=0; i<=imax; i++){    ←針金上の各点に初期条件を指定
    x=dx*(float)(i);
    if(x<0.5){
      TEMP[i]=2.0*x;
    }else{
      TEMP[i]=2.0-2.0*x;
    }
  }
  for(i=0; i<=imax; i++){         ←初期条件をファイルに書き込む
    fprintf(fp, "%7.4f", TEMP[i]);
  }
  fprintf(fp,"¥n");

  for(j=1; j<=30; j++){       ←30 ステップの計算を開始
    for(i=1; i<imax; i++){
      TEMP2[i]=TEMP[i]+c*(TEMP[i+1]-2.0*TEMP[i]+TEMP[i-1]);     ←式(9)
    }
    TEMP2[0]   =0.0;            ←境界条件（左側）
    TEMP2[imax]=0.0;            ←境界条件（右側）
    for(i=0; i<=imax; i++){     ←次のステップの計算の準備
      TEMP[i]=TEMP2[i];
    }
    if(j%10==0){      ←j÷10 のあまりがゼロのとき（つまり j=10, 20, 30 のとき）
      for(i=0; i<=imax; i++){
        fprintf(fp,"%7.4f", TEMP[i]);     ←結果をファイルに書き込む
      }
      fprintf(fp,"¥n");
    }
  }
  fclose(fp);     ←ファイルを閉じる
  return 0;
}
```

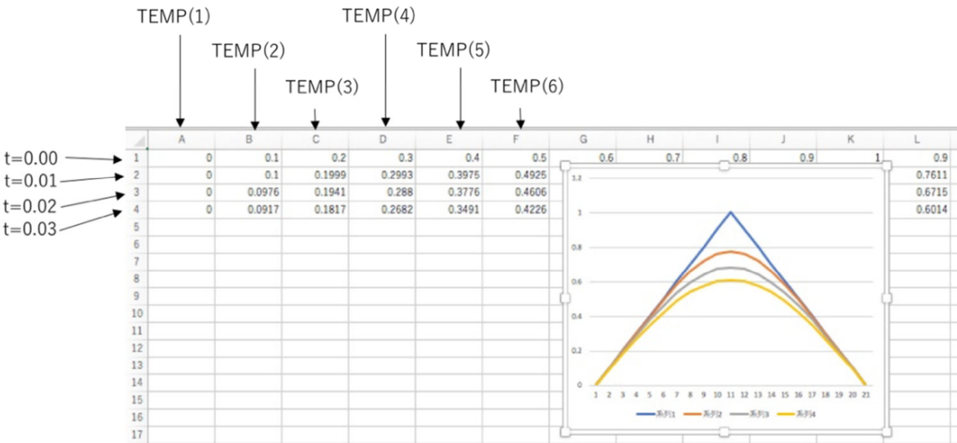
結果（result_diffusion.txt）を Excel に貼り付けて、グラフを描きます。

- テキストファイルを開いてすべてを選択（Ctrl+A）
- Excel に貼り付け（Ctrl+V）
- 1 セルに 1 つの数字が入力されない場合があります。（A 列にすべての数字が入ってしまう）
  そのときは「貼り付けのオプション」から「テキストファイルウィザードを使用」をクリック。
- 「カンマやタブなどの区切り文字によってフィールドごとに区切られたデータ」を選択
  次の画面で、区切り文字として「スペース」を選びます。





- Excel で「折れ線グラフ」を選ぶと、以下のようなグラフが描けると思います。



- グラフの整形、アニメーションについては、次回紹介します。

興味がある人は、色々やってみてください

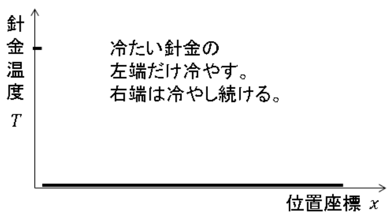
例 1

- 長さ 1.0 の針金を 20 分割し、各点での温度の時間変化を計算
- 初期条件：$T(x,0) = 2x$　　$(x < 0.5$ のとき$)$
  $T(x,0) = 2 - 2x$　　$(x \geq 0.5$ のとき$)$
- 境界条件：$T(0,t) = 0.0$、$T(1,t) = 0.0$
- 熱拡散率：$k = 1.0$
- 時間刻み幅：$\Delta t = 0.001$ で $t = 0.1$ まで 100 ステップ計算

計算時間を
延ばしてみる

例 2

- 長さ 1.0 の針金を 20 分割し、各点での温度の時間変化を計算
- 初期条件：$T(x,0) = 0.0$
- 境界条件：$T(0,t) = 1.0$、$T(1,t) = 0.0$
- 熱拡散率：$k = 1.0$
- 時間刻み幅：$\Delta t = 0.001$ で $t = 0.03$ まで 30 ステップ計算



以上